

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ - 14.02.2026**

Clasa a IX-a

**Secțiunea H₁ - Filieră tehnologică, toate profilurile și specializările
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

Problema 1 (20 de puncte)

- a) Determinați $x \in [1, +\infty)$ știind că: $|2 - 2x| + \sqrt{x^2 - 1} + 1 + x^2 = 2x$.
b) Demonstrați că $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c} \geq 3\sqrt{abc}$, $(\forall) a, b, c \geq 0$.

Soluție:

- a) $x \geq 1 \Rightarrow |2 - 2x| = 2x - 2$ (2p)
 $2x - 2 + \sqrt{x^2 - 1} + 1 + x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 1 + \sqrt{x^2 - 1} = 0, x \in [1, +\infty)$, (3p)
 $\Rightarrow \sqrt{x^2 - 1}(\sqrt{x^2 - 1} + 1) = 0, x \in [1, +\infty)$, (2p)
 $\Rightarrow x = 1$ (3p)
b) $a\sqrt{a} = (\sqrt{a})^3, b\sqrt{b} = (\sqrt{b})^3, c\sqrt{c} = (\sqrt{c})^3$ (3p)
 $M_a \geq M_g \Rightarrow (\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3 + (\sqrt{c})^3 \geq 3\sqrt[3]{(\sqrt{a})^3(\sqrt{b})^3(\sqrt{c})^3}$ (4p)
Finalizare (3p)

Problema 2 (20 de puncte)

În $\triangle ABC$ se consideră punctele D, E și F astfel încât punctul D este mijlocul segmentului AB, E un punct cu proprietatea că $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ și punctul F astfel încât $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BC}$.

- a) Să se arate că $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
b) Să se demonstreze că punctele D, E și F sunt coliniare.
c) Dacă $BE \cap AF = \{M\}$, să se afle numărul real a știind că $\overrightarrow{DM} = a \cdot \overrightarrow{BF}$.

Soluție:

- a) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ (6p)
b) $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{DE} \rightarrow D, E, F$ sunt coliniare (6p)
c) În $\triangle ABF$, AC este mediană, $AE = 2EC$, deci E este centrul de greutate (4p)
Atunci BM este mediană, deci DM este linie mijlocie, iar $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$ și $a = \frac{1}{2}$. (4p)

Problema 3 (20 de puncte)

- a) Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ în care $a_1 + a_2 = 9$ și $a_2 + a_3 = 7$. Arătați că $a_1 - a_{101} = 100$.

b) Știind că $a \geq -1$ demonstrați că $(1 + a)^n \geq 1 + na$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

Soluție:

a) $a_3 - a_1 = -2$ de unde obținem $r = -1$, apoi găsim

$$a_1 = 5. \quad (5p)$$

$$a_{101} = -95 \text{ și apoi } a_1 - a_{101} = 100. \quad (5p)$$

b) Etapa de verificare (3p)

Etapa demonstrației. (6p)

Concluzie. (1p)

Problema 4 (30 de puncte)

O pasăre pleacă dintr-un punct A și parcurge în prima zi 1 km, apoi 2 km în a doua zi, 4 km în a treia zi, 8 km în a patra zi și tot așa în continuare.

a) Câți km a parcurs pasărea în a 11-a zi?

b) Care este distanța parcursă după 13 zile?

c) Presupunând că pasărea se deplasează în fiecare zi în linie dreaptă (nepăstrând direcția de deplasare) demonstrați că ea nu se poate întoarce în punctul inițial A.

Soluție:

a) $d_1 = 1, d_2 = 2^1, d_3 = 2^2, d_4 = 2^3 \Rightarrow d_{11} = 2^{10} = 1024.$ (10p)

b) $d = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{12} = 2^{13} - 1 = 8191$ (10p)

c) Presupunem că pasărea revine în punctul A și astfel se obține poligonul convex $AA_1A_2\dots A_n$ cu lungimile laturilor $d_1 = AA_1 = 1, d_2 = A_1A_2 = 2^1, d_3 = A_2A_3 = 2^2, \dots, d_n = A_{n-1}A_n = 2^{n-1}$ și $A_nA = 2^n$. Știind că lungimea unei laturi a unui poligon este mai mică decât suma lungimilor celorlalte laturi $\Rightarrow A_nA < AA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n \Rightarrow 2^n < 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} \Rightarrow 2^n < 2^n - 1$ (F).

Deci, pasărea nu se poate întoarce în punctul inițial A. (10p)